Correction du TD du 12/01 :

Exercice 1 : L'univers à considérer est

$$\Omega = [\![1, 6]\!]^{\mathbb{N}^*}.$$

Sur cet ensemble, on a vu que la tribu naturelle à considérer est la tribu cylindrique qui est la tribu engendrée par les cylindres :

$$\mathcal{C} = \{ A_1 \times \dots \times A_k \times [\![1,6]\!] \times \dots, k \in \mathbb{N}^*, A_i \in \mathcal{P}([\![1,6]\!]), \forall i \}$$

et $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. notation pour tribu engendrée

Sur cette tribu, on a admis que l'on pouvait définir une proba $\mathbb{P}$ à partir de sa définition sur les cylindres :

il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout

$C = A_1 \times \dots \times A_k \times [\![1,6]\!] \times \dots \in \mathcal{C},$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|A_1|}{6} \times \dots \times \frac{|A_k|}{6}$$

le cardinal apparaît ici car on suppose les dés équilibrés.

le $\times$ ici va faire que les lancers de dés sont indépendants

On se place alors sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère

$$I_k = \{(\omega_n)_{n \geq 1},\ \omega_k \in \{1,3,5\}\}$$

(le k-ième lancer est impair).

$I_k \in \mathcal{A}$ pour tout k car I_k est un cylindre (prendre $A_k = \{1,3,5\}$).

De même, on pose $S_k = \{(\omega_n)_n,\ \omega_k = 6\}$ (le k-ième lancer est un 6). S_k est un cylindre donc un événement (être un événement = appartenir à $\mathcal{A}$).

L'événement recherché est alors

$$A := \bigcup_{n\geq 1}\Big[\overbrace{\bigcap_{k=1}^{n-1} I_k \cap S_n}^{B_n}\Big] \in \mathcal{A}$$

intersection finie

union dénombrable

De plus, pour $m \leq n$, $B_n \cap B_m = \emptyset$. En effet, B_n contient S_n et B_m contient $I_m \subset S_n^c$.

Ainsi, puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité (donc une mesure) :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big[\bigcap_{k=1}^{n-1} I_k \cap S_n\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

Or B_n est un cylindre, on peut calculer sa probabilité :

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(I_1) \times \dots \times \mathbb{P}(I_{n-1}) \times \mathbb{P}(S_n)$$

$$= \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2^{n-1}},$$

Donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{somme géométrique}} = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}.$$

Exercice 2 : On considère ici

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$$

et $\mathcal{C}$ la tribu cylindrique, et $\mathbb{P}$ définie sur les cylindres comme suit :

$$\mathbb{P}(A_1 \times \dots \times A_n \times \{0,1\} \times \dots) = \frac{|A_1| \times \dots \times |A_n|}{2^n}.$$

On considère $p \in \mathbb{N}^*$, et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \in \{0,1\}^p$.

On veut savoir si la suite $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ apparaît dans notre suite infinie de pile ou face.

On cherche à calculer la probabilité de l'événement

$$A = \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{\{(\omega_k)_k,\ \omega_n = \varepsilon_1, \dots, \omega_{n+p-1} = \varepsilon_p\}}_{A_n}$$

qui est un événement car les A_n le

sont (ce sont des cylindres !!).

On considère alors

$$B = \bigcup_{n \geq 1} A_{n \times p} \,/\, B_n$$

On remarque alors que les $(B_n)_n$ portent chacun sur des lancers différents. Ils sont donc indépendants.

Autre preuve que lundi 12/07 :

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c).$$

Or $B^c = \bigcap_{n \geq 1} B_n^c$.

Par continuité de la mesure :

$$\mathbb{P}(B^c) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} B_n^c\right)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(B_1^c) \times \dots \times \mathbb{P}(B_N^c)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)^N$$

$$= 0.$$

Donc $\mathbb{P}(B) = 1$.

Finalement, puisque $A \supseteq B$, on a

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \mathbb{P}(B) = 1$$

donc $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 8 : On garde les mêmes notations qu'à l'exercice 2.

Les $(B_n)_n$ forment des événements indépendants, et $P(B_n) = \frac{1}{2^p}$ pour tout n.

En particulier, $\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2^p}}_{\text{ne dépend pas de } n} = +\infty$.

Ainsi, d'après le lemme de Borel-Cantelli :

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \to +\infty} B_n) = 1.$$

Presque sûrement, une infinité de B_n se réalise, donc on observe, avec proba 1, une infinité de fois notre suite $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$.

Exercice 4 : On considère ici l'univers

$$\Omega = [0,1]^2,$$

et on le munit de la tribu borélienne

$$\mathcal{B}([0,1])^2.$$

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}, \mathbb{R}^d$, ou un sous-ensemble de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^d$, on considérera toujours la tribu borélienne.

La probabilité que l'on peut prendre est alors

$$\mathbb{P} = \lambda_{[0,1]^2}$$

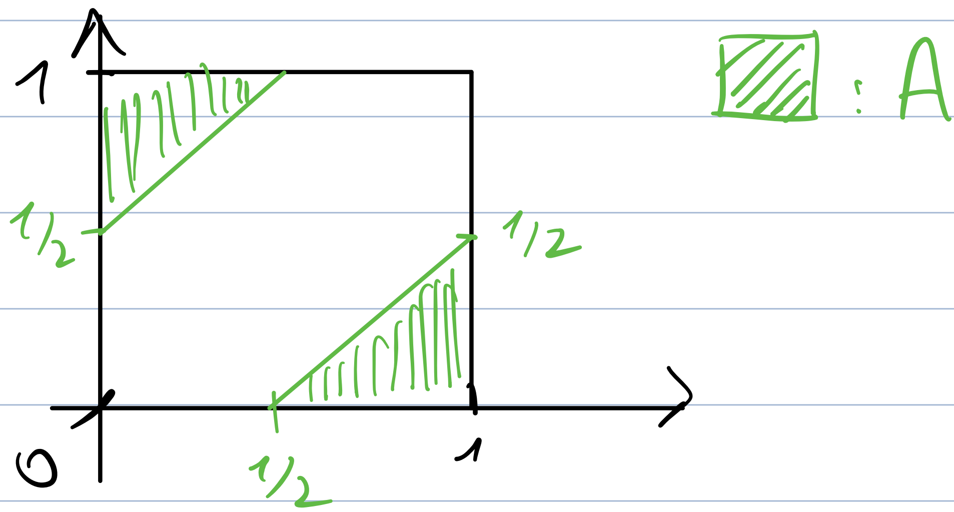
la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1]^2$.
En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([0,1]^2) &= \lambda([0,1]) \times \lambda([0,1]) \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

La probabilité d'un événement correspond alors à l'aire de l'événement.

Soit $A = \{(\omega_1, \omega_2) \in (0,1), |\omega_1, \omega_2| \geq \frac{1}{2}\}$.

Alors A correspond à :



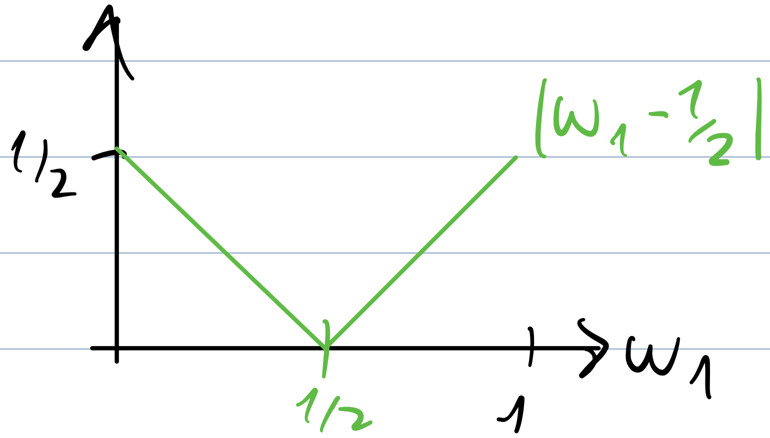
Et donc $\mathbb{P}(A) = \text{Aire}(A) = \frac{1}{4}$.

Autre façon de faire :

$$\mathbb{P}(A) = \int_{(0,1)^2} \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P}$$

$$= \int_{\omega_1=0}^{1} \int_{(\omega_2-\omega_1) \geq 1/2} d\omega_2 \, d\omega_1$$

$$= \int_{w_1=0}^{1} \left| w_1 - \frac{1}{2} \right| dw_1 = 1/4$$



Exercice 9 : M = "être malade"
V = "être vacciné".

L'énoncé donne $\mathbb{P}(V|M) = 0,4$
$\mathbb{P}(M) = 0,01$
$\mathbb{P}(V) = 0,6$.

Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(M|V) = \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(V)}\mathbb{P}(V|M) = \frac{2}{3} \times 0,01 < \mathbb{P}(M).$$

Parmi les gens vaccinés, il y a moins de malades que parmi la population en général ; c'est bien ce que l'on attend des vaccins ! Donc pas d'inquiétude à avoir.